**Préliminaires**

1 ) a ) $Card(\varepsilon_N)=N^N$ b ) $N!$ applications de $\varepsilon_N$ injectives dont 2 strictement monotones .

2 ) $0<p<1$ . $X \mapsto \varepsilon(1)$ . $X(\Omega)=\mathbf{R}^+$ . $\forall x\geq 0,\ F_X(x)=P(X\leq x)=1-e^{-x}$ . $Y=\lfloor pX \rfloor$ .

a ) $Y(\Omega)=\mathbf{N}$ et $\forall n\in\mathbf{N}, (Y=n)=(X\geq \frac{n}{p})\cap(X<\frac{n+1}{p})$ est un événement ( intersection de deux événements )donc $\boxed{Y \text{ est une variable aléatoire discrète}}$ .

Soit $n\in\mathbf{N}$ . $P(Y=n)=P(n\leq pX<n+1)=F_X(\frac{n+1}{p})-F_X(\frac{n}{p})=1-e^{-\frac{n+1}{p}}-(1-e^{-\frac{n}{p}})$ .

Finalement $\boxed{P(Y=n)=e^{-\frac{n}{p}}(1-e^{-\frac{1}{p}})}$ . b ) $(Y+1)(\Omega)=\mathbf{N}^*$ .

$\forall n\in\mathbf{N}^*,\ P(Y+1=n)=P(Y=n-1)=\left(e^{-\frac{1}{p}}\right)^{n-1}(1-e^{-\frac{1}{p}})$ : $\boxed{Y\mapsto \mathbf{G}(1-e^{-\frac{1}{p}})}$.

c ) On en déduit $E(Y+1)=\dfrac{1}{1-e^{-\frac{1}{p}}}$ et par suite $E(Y)=\dfrac{1}{1-e^{-\frac{1}{p}}}-1=\dfrac{e^{-\frac{1}{p}}}{1-e^{-\frac{1}{p}}}=\dfrac{1}{e^{\frac{1}{p}}-1}$ .

$\forall x>0,\ e^x>1$ donc $\boxed{E(Y)>0}$ . Posons $h(x)=e^x-1-x$ . $\forall x>0,\ h'(x)=e^x-1>0$ .

$h$ est donc strictement croissante sur $]0,+\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to 0}h(x)=0$ .

On en déduit $\forall x>0,\ h(x)>0$ et donc $\forall x>0,\ e^x-1>x$ ce qui entraîne $\boxed{E(Y)<p}$ .

3 ) Soit $(r,s)\in\mathbf{N}^2$. Posons $I_{r,s}=\int_0^1 x^r(\ln x)^s dx$ . Effectuons le changement de variable $u=-\ln x$ autrement dit $x=e^{-u}$ . $u\to e^{-u}$ est de classe $C^1$ et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ .

$I_{r,s}$ est de même nature que $J_{r,s}=\int_{+\infty}^0 (e^{-u})^r(-u)^s(-e^{-u}du)$ et égale en cas de convergence .

Avec le changement de variable affine $t=(r+1)u$ autrement dit $u=\dfrac{t}{r+1}$ , $J_{r,s}$ est elle même de même nature que $K_{r,s}=(-1)^{s+1}\int_{+\infty}^0 e^{-t}(\frac{t}{r+1})^s(\frac{dt}{r+1})$ et égale en cas de convergence .

On reconnaît $K_{r,s}=\dfrac{(-1)^s}{(r+1)^{s+1}}\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{s+1-1}dt=\dfrac{(-1)^s}{(r+1)^{s+1}}\Gamma(s+1)$ .

**CCL :** $\boxed{I_{r,s}=\int_0^1 x^r(\ln x)^s dx \text{ converge et vaut } \dfrac{(-1)^s s!}{(r+1)^{s+1}}}$ .

**Partie I**

$X(\Omega)\xrightarrow{T}\mathbf{R}$ . $C(T)=E\left(\left(X-T(X)\right)^2\right)$.

4 ) $X\mapsto \mathbf{U}_{]0,1[}$ . $0<p<1$ . $a\in[0,1-p]$ . On remarque que $]a,a+p[\subset]0,1[$ .

a ) $T_a(X)(\Omega)=\{0,1\}$ . $P(T_a(X)=1)=P(a<X<a+p)=\int_a^{a+p}1dx=p$ . **CCL :** $\boxed{T_a(X)\mapsto \mathbf{B}(p)}$ **.**

b ) D'après le théorème du transfert , $E\left(\left(X-T(X)\right)^2\right)$ existe ssi $\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}(x-T_a(x))^2 f_X(x)dx}_{=I}$ abs cv .

$I=\int_0^1(x-T_a(x))^2\times 1dx$ converge et vaut $I=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(T_a(x))^2dx-2\int_0^1 xT_a(x)dx$ .

Avec Chasles on obtient , comme $T_a(x)$ est nul en dehors de $]a,a+p[$ ,

$I=\dfrac{1}{3}+\int_a^{a+p}1dx-2\int_a^{a+p}x\times 1dx=\dfrac{1}{3}+p-\left((a+p)^2-a^2\right)$ . Finalement $\boxed{C(T)=\dfrac{1}{3}+p(1-p)-2ap}$

c ) Comme $a\in[0,1-p]$ , $\boxed{C(T)\text{ est minimum pour } a=1-p \text{ et vaut } \frac{1}{3}-p(1-p)}$

5 ) $X\mapsto \mathbf{U}_{]0,1[}$ donc $1-X\mapsto \mathbf{U}_{]0,1[}$ et par suite $T_1(X)=-\ln X$ et $T_2(X)=-\ln(1-X)$ suivent la même loi .

a ) $X(\Omega)=]0,1[$ donc $T_1(\Omega)=]0,+\infty[$ . $\forall x\le 0, F_{T_1(X)}(x)=0$ .

$\forall x>0, F_{T_1(X)}(x)=P(-\ln X\le x)=P(X\ge e^{-x})=1-F_X(\underbrace{e^{-x}}_{\in]0,1[})=1-e^{-x}$ .

**CCL :** $\boxed{T_1 \text{ et } T_2 \text{ sont des fonctions de transport de } X \text{ vers la loi } \varepsilon(1)}$ **.**

D'après le théorème du transfert , $E\left(\left(X-T_1(X)\right)^2\right)$ existe ssi $\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}(x-T_1(x))^2 f_X(x)dx}_{=I}$ abs cv .

$I=\int_0^1(x-T_1(x))^2\times 1dx$ converge et vaut $I=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(\ln x)^2dx+2\int_0^1 x\ln x dx=\frac{1}{3}+I_{0,2}+2I_{1,1}$.

Avec le 3 ) b ) , on obtient $\boxed{C(T_1)=\frac{1}{3}+2+2\times(-\frac{1}{4})=\frac{11}{6}}$ .

De même $C(T_2)=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(\ln(1-x))^2dx+2\int_0^1 x\ln(1-x)dx$ et avec le changement de variable affine

$t=1-x$ , $C(T_2)=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1(\ln(t)^2dt+2\int_0^1(1-t)\ln(t)dx=\frac{1}{3}+I_{0,2}+2I_{0,1}+2I_{1,1}=\frac{1}{3}+2-2-2(-\frac{1}{4})=\frac{5}{6}$

On constate que $\boxed{C(T_1)>C(T_2)}$ .

c ) On a vu au 2 ) que si $X\mapsto\varepsilon(1)$ , alors $\lfloor pX\rfloor+1$ suit la loi $\mathbf{G}(1-e^{-\frac{1}{p}})$ .

Soit $q\in]0,1[$ . $1-e^{-\frac{1}{p}}=q\Leftrightarrow\frac{1}{p}=-\ln(1-q)$.

On en déduit que si $X\mapsto\mathbf{U}_{]0,1[}$ , $\left\lfloor\frac{\ln X}{\ln(1-q)}\right\rfloor+1$ suit la loi $\mathbf{G}(q)$.

| Toutes les lois géométriques sont accessibles depuis $X$ |
|---|

6 ) a )Comme $f_Y$ est continue sur $\mathbf{R}$, $F_Y$ est de classe $C^1$ sur $\mathbf{R}$ et $\forall x\in\mathbf{R}, F_Y(x)=f_Y(x)>0$.
$F_Y$ est donc continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ .
Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}F_Y(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}F_Y(x)=1$ , d'après le théorème de la bijection ,

$\boxed{F_Y \text{ réalise une bijection de } \mathbf{R} \text{ sur } ]0,1[}$ .

b ) $F_Y^{-1}(X)(\Omega)=\mathbf{R}$ .

$\forall x\in\mathbf{R}$, $F_{F_Y^{-1}(X)}(x)=P(F_Y^{-1}(X)\le x)=P(X\le\underbrace{F_Y(x)}_{\in]0,1[})=F_Y(x)$ . $\boxed{F_Y^{-1}(X) \text{ a même loi que } Y}$ .

7 ) $Y\mapsto\mathbf{N}(0,1)$ . $0\le|yF_Y(y)\varphi(y)|\le|y\varphi(y)|\times 1$. Or $Y$ admet une espérance donc $\int_{-\infty}^{+\infty}y\varphi(y)\,dy$

absolument convergente . Par critère de comparaison , $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}yF_Y(y)\varphi(y)\,dy}$ est absolument convergente donc convergente .

Soit $A,B\in\mathbf{R}$ . $\int_A^B yF_Y(y)\varphi(y)\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A^B F_Y(y)ye^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\left[-e^{-\frac{y^2}{2}}F_Y(y)\right]_A^B+\int_A^B\varphi(y)e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-\frac{B^2}{2}}F_Y(B)+e^{-\frac{A^2}{2}}F_Y(A)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_A^B e^{-y^2}\,dy\right)$

Comme $\lim\limits_{B\to+\infty} F_Y(B)=1$ , $\lim\limits_{A\to-\infty} F_Y(A)=0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy=\sqrt{\pi}$ , par PAL on obtient

$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} y\,F_Y(y)\varphi(y)\,dy=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}}$ .

$(y-F_Y(y))^2\varphi(y)=y^2\,\varphi(y)+(F_Y(y))^2\varphi(y)-2y\,F_Y(y)\varphi(y)$ . $\int_{-\infty}^{+\infty} y^2\varphi(y)\,dy=E(Y)=V(Y)+(E(Y))^2=1$

$$\int_A^B (F_Y(y))^2\varphi(y)\,dy=\int_A^B (F_Y(y))^2F_Y{}'(y)\,dy=\frac{1}{3}(F_Y(B))^2-\frac{1}{3}(F_Y(A))^2\xrightarrow[B\to+\infty]{A\to-\infty}\frac{1}{3}\ .$$

Enfin on vient de voir que $\int_{-\infty}^{+\infty} y\,F_Y(y)\varphi(y)\,dy=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$ .

Par théorème de linéarité , on peut conclure que

$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}(y-F_Y(y))^2\varphi(y)dy \text{ converge et vaut } 1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}}$ .

c ) Avec le changement de variable $C^1$ strictement croissant , $u=F_Y(y)$ ,

on obtient puisque $F_Y{}'(y)=\varphi(y)$ , $\int_0^1 (F_Y{}^{-1}(u)-u)^2\,du=\int_{-\infty}^{+\infty}(y-F_Y(y))^2\varphi(y)\,dy=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$

autrement dit $\boxed{C(F_Y{}^{-1})=\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}}$

**Partie II**

8 ) a ) Soit $(k,l)\in[[1,N]]^2$ .

Si $k>l$ , $(\underbrace{d_k-d_l}_{>0})(\underbrace{a_k-a_l}_{>0})>0$ . Si $k>l$ , $(\underbrace{d_k-d_l}_{<0})(\underbrace{a_k-a_l}_{<0})>0$ . Si $k>l$ , $(d_k-d_l)(a_k-a_l)=0$ .

**CCL :** $\boxed{d_ka_k\ge d_ka_l+d_la_k-d_la_l}$ **.**

b ) Soit $(p_1,...,p_N)\in \mathbf{R}_+{}^N$ tel que $\sum\limits_{k=1}^{N} p_k=1$ .

En multipliant l'inégalité précédente par $p_kp_l\ge 0$ et en effectuant une double sommation , on obtient

$\sum\limits_{l=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_lp_kd_ka_k\ge\sum\limits_{l=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_lp_kd_ka_l+\sum\limits_{l=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_lp_kd_la_k-\sum\limits_{l=1}^{+\infty}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_lp_kd_la_l$ et comme $\sum\limits_{l=1}^{N} p_l=\sum\limits_{k=1}^{N} p_k=1$ ,

$\sum\limits_{k=1}^{N} p_kd_ka_k\ge\sum\limits_{l=1}^{N} p_la_l\sum\limits_{k=1}^{N} p_kd_k+\sum\limits_{l=1}^{N} p_ld_l\sum\limits_{k=1}^{N} p_ka_k-\sum\limits_{l=1}^{N} p_ld_la_l$ autrement dit

$2\sum\limits_{k=1}^{N} p_kd_ka_k\ge 2\sum\limits_{l=1}^{N} p_la_l\sum\limits_{k=1}^{N} p_kd_k$ et donc $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{N} p_kd_ka_k\ge\sum\limits_{k=1}^{N} p_kd_k\sum\limits_{k=1}^{N} p_ka_k}$ . **(1)**

9 ) a ) Si on réordonne $t(n),t(n+1),...,t(N)$ en une suite croissante $u(n),u(n+1),...,u(N)$ , on a nécessairement $u(k)\le\hat{t}(k)$ et comme $a_1<a_2<...<a_N$ , $\boxed{\sum\limits_{k=n}^{N} a_{t(k)}\le\sum\limits_{k=n}^{N} a_{u(k)}\le\sum\limits_{k=n}^{N} a_{\hat{t}(k)}}$

b ) $\sum\limits_{n=1}^{N}\left((d_n-d_{n-1})\sum\limits_{k=n}^{N} a_{t(k)}\right)=\sum\limits_{n=1}^{N}\left((d_n-d_{n-1})\sum\limits_{k=n}^{N} a_{t(k)}\right)=\sum\limits_{n=1}^{N} d_n\sum\limits_{k=n}^{N} a_{t(k)}-\sum\limits_{n=1}^{N} d_{n-1}\sum\limits_{k=n}^{N} a_{t(k)}$ .

Avec le changement d'indice $n'=n-1$ ,

$$\sum_{n=1}^{N}\left((d_n-d_{n-1})\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)}\right)=\sum_{n=1}^{N} d_n\sum_{k=n}^{N} a_{t(k)}-\sum_{n'=0}^{N-1} d_{n'}\sum_{k=n'+1}^{N} a_{t(k)}=d_Na_{t(N)}+\sum_{n=1}^{N-1} d_na_{t(n)}\ .$$

On a bien $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{N}\left((d_n-d_{n-1})\sum\limits_{k=n}^{N} a_{t(k)}\right)=\sum\limits_{n=1}^{N} d_na_{t(n)}}$ .

c ) On aura de même $\sum_{n=1}^{N}\left((d_n-d_{n-1})\sum_{k=n}^{N}a_{\hat{t}(k)}\right)=\sum_{n=1}^{N}d_na_{\hat{t}(n)}$ .

En appliquant 9 ) a ) et comme $d_n-d_{n-1}>0$ ( petit souci si $d_1<0$ ), on déduit $\boxed{\sum_{n=1}^{N}d_na_{t(n)}\le\sum_{n=1}^{N}d_na_{\hat{t}(n)}}$ **(2) .**

10 ) $c(T)=\sum_{k=1}^{N}(d_k-T(d_k))^2=\sum_{k=1}^{N}d_k{}^2+\sum_{k=1}^{N}(T(d_k))^2-2\sum_{k=1}^{N}d_kT(d_k)$ .

Comme $T$ est une bijection de $D$ sur $A$, $\sum_{k=1}^{N}(d_k-T(d_k))^2=\sum_{k=1}^{N}d_k{}^2+\sum_{k=1}^{N}a_k{}^2-2\sum_{k=1}^{N}d_kT(d_k)$ .

De même $c(\hat{T})=\sum_{k=1}^{N}(d_k-\hat{T}(d_k))^2=\sum_{k=1}^{N}d_k{}^2+\sum_{k=1}^{N}a_k{}^2-2\sum_{k=1}^{N}d_k\hat{T}(d_k)$ .

Comme $a_1<a_2<...<a_N$ et que $\hat{T}(d_k)=a_k$, il existe $t\in\varepsilon_N$ bijective telle que

$T(d_k)=a_{t(k)}$ et $\hat{T}(d_k)=a_{\hat{t}(k)}$. Il suffit alors d'appliquer **(2)** pour obtenir $\sum_{k=1}^{N}d_kT(d_k)\le\sum_{k=1}^{N}d_k\hat{T}(d_k)$

et donc $c(T)\ge c(\hat{T})$.

11) Soit $h$ croissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ . Posons $X(\Omega)=\{d_k\}_{1\le k\le N}$ et $p_k=P(X=d_k)$ .

Appliquons **(1)** avec $a_k=h(d_k)$ : $\sum_{k=1}^{N}p_kd_kh(d_k)\ge\sum_{k=1}^{N}p_kd_k\sum_{k=1}^{N}p_kh(d_k)$ ce qui se traduit avec la formule du transfert par $\boxed{E(Xh(X))\ge E(X)E(h(X))}$ .

b ) On en déduit $\operatorname{cov}(X,h(X))=E(Xh(X))-E(X)E(h(X))\ge 0$ et donc $\boxed{\rho_{X,h(X)}=\frac{\operatorname{cov}(X,h(X))}{\sigma(X)(h(X)}\ge 0}$ .

c ) Supposons $X\mapsto\mathbf{U}_{[[1,N]]}$ et appliquons **(2)** avec si $X=n$ , $d_n=h(n)$ et $a_n=n$ .

On obtient après multiplication par $\frac{1}{N}$ , $\sum_{n=1}^{N}h(n)t(n)P(X=n)\le\sum_{n=1}^{N}h(n)\hat{t}(n)P(X=n)$

autrement dit $\boxed{E(Xh(X))\le E\left(h(X)\hat{t}(X)\right)}$ .

**Partie III**

12 ) a ) $X_N(\Omega)=[[1,N]]$ . $\forall k\in[[1,N-1]]$, $P(X_N=k)=P(k\le 1+NU<k+1)=P(\frac{k-1}{N}\le U<\frac{k}{N})=\frac{1}{N}$

$P(X_N=N)=P(\frac{k-1}{N}\le U<\frac{k}{N})+\underbrace{P(U=1)}_{=0}=\frac{1}{N}$ . **CCL :** $\boxed{X_N\mapsto\mathbf{U}_{[[1,N]]}}$.

b ) Soit $\omega\in\Omega$ . Comme $Z=g(U)$, $|Z(\omega)-Y_N(\omega)|=\left|g(U(\omega))-g(\frac{X_N(\omega)}{N})\right|$.

Si $U(\omega)=1$ , $|Z(\omega)-Y_N(\omega)|=0$ .

Supposons $U(\omega)\in[\,0,1[$ . On a alors $U(\omega)\le\frac{X_N(\omega)}{N}\le U(\omega)+\frac{1}{N}$

$g$ est de classe $C^1$ sur $[0,1]$ donc $g'$ est continue sur le segment $[0,1]$ et par suite $g'$ est bornée sur $[0,1]$.
D'après l'inégalité des accroissements finis , en posant $\lambda=\sup_{[0,1]}|g'|$,

$|Z(\omega)-Y_N(\omega)|\le\left|U(\omega)-\frac{X_N(\omega)}{N}\right|\times\lambda$ . **CCL :** $\boxed{\exists\lambda>0,\forall N\in\mathbf{N}^*,\ \forall\omega\in\Omega,\ |Z(\omega)-Y_N(\omega)|\le\frac{\lambda}{N}}$ .

c ) Soit $y\in\mathbf{R}$ . Puisque $Z=g(U)$ a même loi que $Y$ VAR à densité ,

$F_Y(y-\frac{\lambda}{N})=P(Y<y-\frac{\lambda}{N})=P(Z<y-\frac{\lambda}{N})$

Comme $|Z(\omega)-Y_N(\omega)|\leq\frac{\lambda}{N}$ , $Y_N(\omega)\leq Z(\omega)+\frac{\lambda}{N}$ , $(Z<y-\frac{\lambda}{N})\subset(Y_N<y)$ .

Par suite $\boxed{F_Y(y-\frac{\lambda}{N})\leq P(Y_N<y))}$ .

13 ) D'après 12 ) c ) , $F_Y(\hat{t}_N(k)-\frac{\lambda}{N})\leq P\left(Y_N<\hat{t}_N(k))\right)$

Si $\left(Y_N<\hat{t}_N(k))\right)$ est réalisé , alors $X_N$ peut prendre au plus $k-1$ valeurs distinctes .

On en déduit que $F_Y(\hat{t}_N(k)-\frac{\lambda}{N})\leq P\left(Y_N<\hat{t}_N(k))\right)<\frac{k}{N}$ .

On en déduit $\hat{t}_N(k)<F_Y^{-1}(\frac{k}{N})+\frac{\lambda}{N}$ et donc $\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}\hat{t}_N(k)<\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}(F_Y^{-1}(\frac{k}{N})+\frac{\lambda}{N})$

D'après 9 ) c ) avec $d_k=\frac{k}{N}$ , $\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}t_N(k)\leq\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}\hat{t}_N(k)$ .

Finalement on a bien $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}t_N(k)\leq\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}(F_Y^{-1}(\frac{k}{N})+\frac{\lambda}{N})$ .

c ) On reconnaît des sommes de Riemann .
Par passage à la limite ( $N\to+\infty$ ) , $g$ et $F_Y^{-1}$ étant continues sur $[0,1]$ , on obtient

$\int_0^1 xg(x)dx\leq\int_0^1 x(F_Y^{-1}(x))dx$ car $\frac{\lambda}{N}\times\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{N}\xrightarrow{N\to+\infty}0\times\int_0^1 xdx=0$ .

On en déduit $\int_{-\infty}^{+\infty}xg(x)f_U(x)dx\leq\int_{-\infty}^{+\infty}x(F_Y^{-1}(x))f_U(x)dx$ autrement dit $\boxed{E(Ug(U))\leq E\left(UF_Y^{-1}(U)\right)}$ .

14 ) a ) $C(g)=E\left((U-g(U))^2\right)=E(U^2)+E(Y^2)-2E(Ug(U))$ .

D'après 13 ) c ) , $C(g)$ est minimale lorsque $g=F_Y^{-1}$ . **CCL :** $\boxed{T^*=F_Y^{-1}}$ **.**

b ) Supposons $Y=|4U-2|$ . $4U-2\mapsto\mathbf{U}_{[-2,2]}$ . $Y(\Omega)=[0,2]$ .

$\forall x\in[0,2]$, $F_Y(x)=P(Y\leq x)=\frac{x+2}{4}-\frac{-x+2}{4}=\frac{x}{2}$ d'où $\forall x\in[0,1]$, $F_Y^{-1}(x)=2x$ .

On a donc $\boxed{\forall x\in[0,1],\ T^*(x)=2x}$ et $\boxed{C(T^*)=E\left((U-T^*(U))^2\right)=E(U^2)=V(U)+\left(E(U)\right)^2=\frac{1}{12}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}}$